**3-2 高斯映射的定义及其基本性质** 2020年6月1日13点41分

该定义前面的一段文字值得阅读.

**定义1** 令为具有方向的曲面.映射在单位球面上取值

则映射被定义,称为S的高斯映射.

验证高斯图是可微的很简单.在的微分是从到的线性映射.由于和是相同的向量空间,因此可以将视为上的线性映射.

线性映射的操作如下.对于S中的每条参数化曲线,其中,我们考虑球中的参数化曲线.这等于将法线向量限制在曲线上.切向量是中的向量(图3-3).它测量在时受限于曲线的法向矢量N的变化率.因此,测量在附近如何从拉开.在曲线的情况下,此度量由曲率数字给出.对于表面,此度量的特征在于线性映射.

**命题1** 高斯映射的微分是一个自拌线性映射.

**定义2** 定义在上的二次型被称为S在点的第二基本形式.

**定义3** 设为中通过的规则曲线,处的曲率为,且,其中是在处的法向量,是S在处的法向量.则数称为在处的**法线曲率**.

换句话说,是向量在的曲面法线上的投影长度,其符号由p处S的方向N给出.

为了解释第二种基本形式,考虑由参数化的规则曲线,其中是的弧长,且.如果用表示法线向量在曲线的限制,则我们有.因此,

因此

换句话说,单位矢量的第二基本形式的值等于经过并与相切的规则曲线的法线曲率.特别是,我们得到了以下结果.

**命题2(缪斯尼尔)** 位于表面S上并在给定点处具有相同切线的所有曲线在此点处具有相同的法线曲率.

让我们回到线性映射.第3章附录的定理表明,对于每个,存在的正交基,使得.此外和()是限制在的单位圆内的第二基本形式的最大值和最小值.也就是说,它们是处法向曲率的极值.

**定义4** 最大法向曲率和最小法向曲率称为处的主曲率;相应的方向,即特征向量给定的方向,称为处的**主方向**.

**定义5** 如果S上的规则连接曲线C使得对于所有而言,C的切线是处的主方向,则称C为S的**曲率线**.

**命题3(Olinde Rodrigues)** 使上的规则连接曲线C成为S的曲率线的必要和充分条件是

对上任意参数曲线成立,其中且是的可微分函数.在这种情况下,是沿着的主曲率.

在处的主曲率的知识使我们能够轻松计算沿给定方向的法向曲率.实际上,令且.由于和构成的正交基,所以我们有

其中是方向上从到的角度.沿着的法向曲率由下式给出

最后一个表达式通常称为**欧拉公式**;实际上,它只是基第二种基本形式的表达.

**定义6** 令并令是高斯映射的微分.的行列式是S在p处的**高斯曲率**. 的一半轨迹的负值称为S在处的**平均曲率**.

根据主曲率，我们可以写成

**定义7** 曲面S的一个点称为

1. 椭圆形如果.
2. 双曲面如果.
3. 抛物面如果,且
4. 平面如果.

**定义8** 如果在处,,则称为的**脐点[umbilical point]**;特别地,平面点()是脐点.

**命题4** 如果连接表面的所有点都是脐点,则S包含在球体或平面中.(**证明过程很精彩,值得反复品味**.)

**定义9** 令是中的一个点.S在p处的渐近方向是法向曲率为零的方向.S的渐近曲线是规则连接曲线,使得对于每个，C在p处的切线都是一个**渐近方向**.

定义10 令为表面上的一个点.如果dNp（w1），w2 = w1，dNp（w2）= 0，则两个非零向量w1，w2∈Tp（S）是共轭的。两个方向r1，r2在 如果分别平行于r1和r2的一对非零向量w1，w2是共轭的，则p是共轭的。

本节内同有80%可以看懂，但是习题只有一两道会做,内同过于难理解,以后再试!

**3-3 局部坐标系下的高斯映射** 2020年6月2日09点51分-2020年10月6日11点16分

假定本节中考虑的所有参数与的方向N兼容;也就是说,在中,

令为表面的点上的参数化,令为上的参数化曲线,其中.为了简化表示法,我们将约定以下所有出现的函数在点处表示其值.

在处的切向量为并且

由于和属于,我们可以写作

因此,

也就是

这表明在的基础上,由矩阵给出,.请注意,除非是正交基,否则该矩阵不一定是对称的.

另一方面,第二基本形式在中的表达式由下式给出

其中,由于

现在,我们将根据系数获得的值.从等式(1),我们有

其中和是基于的第一基本形式的系数(参见第2-5节).关系式(2)可以用矩阵形式表示:

因此,

很容易检查

因此,基于的矩阵的系数的以下表达式:

为了完整起见,应该提到的是,具有上述值的关系(1)被称为Weingarten方程.

从等式(3)我们立即获得

为了计算平均曲率,我们记得是的特征值.因此,和满足方程

其中是单位映射.由此可见,线性图是不可逆的.因此,它的行列式为零.从而,

或

由于和是上述二次方程的根,我们得出以下结论:

因此,

由此得到

**命题1** 令为表面S的椭圆点.然后在S中存在的邻域V,使得V中的所有点都属于切平面的同一侧.令为双曲点.然后在p的每个邻域中,S点都存在于的两侧.

设为的参数化,,设是该参数化中第二基本形式的系数。

我们记得(见第3-2节的第9节)一条规则曲线C在坐标领域是渐进曲线当且仅当对于C的任何参数化时,我们具有,即当且仅当

因此,式(7)被称为**渐近曲线的微分方程**.在下一节中,我们将对该表达赋予更精确的含义.目前,我们仅想从等式(7)得出以下有用的结论:双曲点附近(例如)的参数化是渐近曲线的必要和充分条件是.

实际上,如果曲线和曲线满足式（7）,我们得到.相反,如果最后一个条件成立且,则式（7）变为,这显然由坐标线满足.

一条规则曲线C在坐标领域是曲率线当且仅当对于C的任意的参数化,我们具有(3-2节命题3)

因此,函数满足方程组

通过消除上述系统中的,我们可以获得**曲率线的微分方程**,

可以用更对称的方式写成

利用主方向彼此正交的事实,从等式(8)容易得出,参数化的坐标曲线成为非脐点附近的曲率线的必要和充分条件是:.(**这段话不是很明白**)

例题4比较重要，全面介绍了卷曲面的各种性质.

**命题2** 令为表面S的点,使得高斯曲率,,令V为p的连接邻域,其中K不改变符号.则

其中A是包含的区域的面积,是B通过高斯映射的图像的面积,并且该极限是通过收敛到的一系列区域来获得的,在某种意义上,对于足够大,周围的任何球都包含所有.(**证明过程需要理解**)

**习题3** 确定链状体

的渐近曲线.

**解**:显然

因此,

将和带入到公式(7),消去非零项,得到

即

其中和都是关于t的函数.

如果,两边同时积分,得到常数.

如果,两边同时积分,得到常数. **End**.

习题5 考虑参数化曲面(Enneper曲面)

并展示

第一基本形式的系数为

习题7 结合例题4和微积分第17章第一节内容比较容易理解

习题8 接触点 形意证明题，比较难，需复习第二章内容

习题9 接触点 形意证明题，习题8的延申，比较难，需复习第二章内容

习题10 接触点 形意证明题，习题8的延申，比较难，需复习第二章内容

习题12 已在草稿上完成,

习题13 已在草稿行完成..

习题14 已在草稿上完成,需要注意卷曲面的构造方法

**剩余习题可能需要结合二次项和微积分教材14.7节内容来理解**,暂且略过,慢慢完成.

**3.4 向量场** 2020年6月2日13点53分-2020年10月14日14点21分

一个开集中的向量场是一个映射,为每个分配一个向量.如果写且,函数和是中的可微函数,则向量场被认为是可微的.

给定向量场,自然会问这个场是否存在轨迹,即是否存在可微分的参数化曲线,使得.

用常微分方程的语言来说,向量场决定了一个微分方程的系统,

的轨迹是方程(1)的解.

**定理1** 令为开集中的向量场.给定,存在的轨迹(即),其中.该轨迹在以下意义上是唯一的:任何其他轨迹()与中的一致.

**定理2** 令为开集中的向量场.对于每个,存在的一个邻域,一个区间和一个映射,使得

1. 对于固定点,曲线是穿过的轨迹.即
2. 是可微的.

映射称为在处的(局部)流动.

令为开集中的向量场,令使得.然后存在的邻域和一个微分函数使得沿的每个轨迹都是恒定的,并且对于所有成立.

上述引理的函数在附近被称为的(局部)**第一积分**.例如,如果在中定义,则第一积分为.

一个开集中的**方向场**是一个对应关系,它为中穿过每个分配一条线.如果的邻域存在定义的非零可微向量场,则被称为可微的,使得对于每个是的基函数;如果每个都可微,则r在U中可微.

对于中的每个非零可微矢量场,对应于一个由生成的线给定的方向的微分场,.

根据其定义,每个方向的微分场都会局部地产生一个非零的微分向量场.然而,这在全局上不是正确的,如图3-28的曲线的切线所给出的中的方向场所示.为了获得可微的非零向量场而对这些曲线进行定向的任何尝试都会导致矛盾.

如果是所有处的切线,则规则连接曲线是在中定义的方向场的积分曲线.

通过前面已经看到的,很明显,给定开集中方向的可微域.对于通过每一个的积分曲线C；C在局部上与轨迹的轨迹一致，该轨迹通过在U中由r确定的矢量场的q来确定。 在下文中，我们将仅考虑可区分的方向领域，并且通常将省略可微分一词.

描述方向场的自然方法如下.我们说,对于某些,如果,则在处的两个非零向量和是等价的[equivalent].两个这样的向量表示通过的同一直线,相反,如果两个非零向量属于的同一条直线通过,则它们是等效的.因此,可以通过为每个分配一对实数（属于的非零向量的坐标）来给出开放集上方向的场.对和是等价的,.

用微分方程的语言,方向场通常由下列公式给出

这仅表示在点处,我们将穿过的线与包含向量或其任何非零倍数的线相关联(图3-29).向量场的轨迹迹线是的积分曲线.由于参数化在上述考虑中不起作用,因此经常使用下列表达式来代替等式(2):

**定义1** 规则表面的开集U⊂S中的向量场是对应于为每个分配向量.矢量场在处是可微的,仅当对于处的某些参数化,函数和由下列关系给定

并且在处是可微的;显然该定义并不依赖的选择.

**定理** 令和是一个开集中的两个向量场,它们在某个点处线性独立.然后可以对的邻域进行参数化，使得对于每个通过的此参数化的坐标曲线与和确定的线相切.

**推论1** 给定一个开集U⊂S两个方向场和的,使得在时,在的邻域中存在参数化,使得坐标曲线的是和的积分曲线.

**推论2** 对于所有,在的邻域中存在参数化使得坐标曲线u = const,v = const。 对于每个正交相交(这样的x称为正交参数化).

**推论3** 令为S的双曲点.然后可以对的邻域进行参数化,使得该参数化的坐标曲线为S的渐近曲线.

**推论4** 令是的非脐点.然后可以对的邻域进行参数化,使得该参数化的坐标曲线为的曲率线.

本节内容学习得分:2分.

向量场还好，方向场比较难理解，需要阅读更多的资料。

习题第二次阅读时再做.

3-5 直纹曲面和最小曲面 2020年10月19日12点37分

A.直纹曲面

一条(直)线的(可微分)单参数族是对应关系，它为每个分配一个点和向量,使得和都可微分地依赖于.对于每个,穿过并平行于的直线称为族的直线.

给定一个单参数线族,参数化曲面

称为由族生成的直纹曲面[ruled surface].线称为标线[rulings],曲线称为曲面的方向.有时我们使用直纹曲面来表示的轨迹.应当注意,我们还允许具有奇异点,即的点.

现在开始研究一般的直纹表面.我们可以不失一般性地假设.为了发展该理论,我们需要一个非平凡的假设,即所有的.如果的零是孤立的,我们可以将表面分割成碎片,使得该理论可以应用于每个面.但是,如果的零具有聚类点,则情况可能会变得复杂,在此将不予处理.

假设,通常通过说直纹表面是非圆柱面来表示.

除非另有说明,否则我们将假定

是具有的非圆柱形直纹曲面.请注意,假设表示对于所有,.

我们首先要找到一个参数化曲线,使得和位于的迹线上,即

对于某些实值函数,.假设存在这样的曲线,我们得到

由于,

因此,由下式给出

因此,如果我们通过等式(2)和(3)定义,我们将获得所需的曲线.

现在我们将表明,曲线不取决于直纹表面的准线的选择.称为收缩线,其点称为直纹表面的中心点.

为了证明我们的主张,令为直纹曲面的另一个方向;也就是说.对于所有，

对于某些函数.然后,从等式(2)和(3)我们得到

其中是与相对应的收缩线.另一方面,等式(4)暗示

因此,

由于.这证明了我们的主张.

现在,我们将紧缩线作为直纹曲面的方向,并将其写为:

有了这个选择,我们有

且

由于且,我们得出结论:对于某些函数.从而,

由此得出,直纹曲面(5)的唯一奇点沿着约束线,并且当且仅当时,它们才会出现.注意到

其中,通常是的缩写.

让我们计算曲面(5)在其规则点处的高斯曲率.由于

对于第二种基本形式的系数,

因此(由于,我们不需要的值来计算),

这表明,在规则点处,直纹曲面的高斯曲率满足,并且仅沿着在奇点处满足约束线的规则,K为零.

等式(6)使我们能够给出直纹表面(规则)中心点的几何解释.的确,除了中心点以外,一个裁定的点都是表面的规则点.如果,则函数是该裁定的连续函数,根据等式(6),中心点的特征是在那有最大值.

有关约束线的另一种几何解释,请参见练习4.

我们还指出,曲率K在相对于中心点对称的标线上的点处取相同的值(这证明中心是正确的). 函数称为的分布参数.由于束线与方向的选择无关，因此对于也是如此.如果是规则的,我们对有以下解释.在处表面的法线向量为

另一方面(),

因此,如果是和形成的角度,则

因此,如果是某点处的法线向量与该点的中心点处的法线向量所成的角度,则与这两个点之间的距离成比例,并且比例系数为分布参数的倒数.

在直纹表面中,可开发性**[developables]**起着杰出的作用.让我们再次从任意直纹曲面(不一定非圆柱面,公式(1))开始,公式(1)被称为可开发的仅当

为了找到条件(9)的几何解释,我们将在一个规则点计算可开发表面的高斯曲率.完全类似于获得方程式(6)的计算.得出

根据条件(9),;因此,

这意味着,在规则点处,可开发表面的高斯曲率等于零.

现在,我们可以区分出两个非穷尽的可展开曲面情况:

,这意味着.因此,是恒定的,并且直纹表面是通过将圆柱与平面相交而获得的曲线上的圆柱,垂直于一个平面.

对于所有.在这种情况下,对于所有.因此,该曲面是非圆柱的,我们可以应用以前的工作.因此,我们可以确定约束线(2)并检查分布参数

因此,收缩线将是可显影表面的奇异点的轨迹.如果对于所有,则可从等式(10)和得出平行于的事实.因此,直纹表面是的切线表面.如果对于所有,则约束线是一个点,并且直纹表面是在此点具有顶点的圆锥.

B. 最小表面 2020年10月19日19点49分

如果规则参数化的曲面的平均曲率为0,则称为“**最小[minimal]**”.如果规则曲面的每一个参数化最小,则规则曲面最小.

为了解释为什么我们在这种表面上使用最小这个词,我们需要引入变体的概念.令为规则参数化曲面.选择一个有界域U(参见第2-5节)和一个微分函数,其中是域与边界的并集.由确定的的正常变化[normal variation]是由下式给出的映射(图3-38):

对于每个固定的,映射

是一个参数化曲面,其中

因此,如果我们用表示的第一个基本形式的系数,则可以得出

通过使用以下事实

并且平均曲率为（第3-3节，方程（5））

我们得到

其中.

因此,如果足够小,则是规则的参数化曲面.此外,的面积为

其中.由此得出,如果小,则是一个微分函数,并且其在时的导数为

**命题1** 令为规则的参数化曲面,令为中的有界域.则是最小的当且仅当对所有的D以及的正常变化都成立.

因此,最小表面的任何有界区域是的任何正常变化的面积函数的临界点.应该注意的是,这个临界点可能不是最低限度,这使得最低限度这个词看起来有些尴尬.但是,它是由来已久的术语,由拉格朗日(最早定义最小表面)于1760年引入.

最小表面通常与肥皂膜有关,可以通过将线框浸入肥皂溶液并将其抽出来获得肥皂膜.如果实验顺利进行,将获得具有与边界相同框架的肥皂膜.从物理上的考虑可以证明,该膜将处于这样一个位置,在该位置的规则点处平均曲率为零.这样,我们可以“制造”出美丽的最小表面,如图3-39所示.

备注1.应该指出的是,根据我们的定义,并非所有肥皂膜都具有最小的表面.我们假设最小曲面是规则的(我们可以假设一些孤立的奇异点,但是如果超出该范围,则会使处理的基本面减少很多).但是,可以使用例如立方体作为框架(图3-40)形成肥皂膜，该肥皂膜沿直线具有奇异性. 备注2.最小表面与肥皂膜之间的联系引发了著名的高原问题(高原是比利时的物理学家,他在1850年左右对肥皂膜进行了仔细的实验​).这个问题可以大致描述如下:证明每个闭合曲线都存在一个以为边界的最小面积的表面S.为了使问题更精确(允许使用哪些曲线和曲面以及C代表S的边界),本身就是问题的重要部分.道格拉斯（Douglas）和拉多（Radó）在1930年同时解决了一个高原问题的版本.进一步的版本(以及更高维度的问题的概括)启发了数学实体的创建,这些实体至少包括像肥皂膜一样多的东西.我们将感兴趣的读者推荐给第一章.Lawson [20]中的第2部分（参考资料在书的末尾）中提供了更多详细信息和Plateau问题的近期参考书目.

对于任意参数化的规则曲面,将方便引入由定义的平均曲率矢量.H方向的几何含义可以从公式(12)获得.确实,如果我们选择,那么对于这种特殊的变化,

这意味着,如果我们在向量的方向上使变形,则面积最初会减小.

如果和,则规则参数化曲面被认为是**等温的[isothermal]**.

**命题2** 令是规则的参数化曲面,并假设是等温的.则

其中.

可微函数的拉普拉斯定义为. 如果,我们说是U中的谐波.从命题2中,我们获得

**推论** 令为参数化曲面,并假设为等温线.则是最小的当且仅当其坐标函数为谐波.

令表示复平面,通常,通过设置来用识别.我们回想起函数是解析的,通过写

实函数和具有连续的一阶偏导数,它们满足所谓的Cauchy-Riemann方程:

现在令是规则的参数化曲面,并定义复函数

其中和是的组成函数.

**引理** 是等温的当且仅当.如果最后的条件已满足,则是等温的当且仅当和是解析函数.

**定理** 令是中非平面的规则,封闭(作为R3的子集)的最小曲面.则高斯映射的图像在球面中是密集的(也就是说,任意靠近的任何点都存在的点).

本节学习得分:3分

习题第二次阅读时再做.