**3-2 高斯映射的定义及其基本性质** 2020年6月1日13点41分

**定义1** 令为具有方向的曲面.映射在单位球面上取值

则映射被定义,称为S的高斯映射.

验证高斯图是可微的很简单.在的微分是从到的线性映射.由于和是相同的向量空间,因此可以将视为上的线性映射.

线性映射的操作如下.对于S中的每条参数化曲线,其中,我们考虑球中的参数化曲线.这等于将法线向量限制在曲线上.切向量是中的向量(图3-3).它测量在时受限于曲线的法向矢量N的变化率.因此,测量在附近如何从拉开.在曲线的情况下,此度量由曲率数字给出. 对于表面,此度量的特征在于线性映射.

**命题1** 高斯映射的可微是一个自拌线性映射.

**定义2** 定义在上的二次型被称为S在点的第二种基本形式.

**命题2** 设C为S中通过的规则曲线,处的曲率为,且,其中是C的法向矢量,是S在处的法向矢量.则数称为在处的法线曲率.

为了解释第二种基本形式,考虑由参数化的正则曲线,其中是的弧长,且.如果用表示法线向量在曲线的限制,则我们有.因此,

因此

换句话说,单位矢量的第二基本形式的值等于经过并与相切的正则曲线的法线曲率.特别是,我们得到了以下结果.

**命题2(缪斯尼尔)** 位于表面S上并在给定点处具有相同切线的所有曲线在此点处具有相同的法线曲率.

让我们回到线性映射.第3章附录的定理表明,对于每个,存在的正交基,使得.此外和()是限制在的单位圆内的第二基本形式的最大值和最小值.也就是说,它们是p处法向曲率的极值.

**定义4** 最大法向曲率和最小法向曲率称为处的主曲率;相应的方向,即特征向量给定的方向,称为p处的主方向.

**定义5** 如果S上的规则连接曲线C使得对于所有而言,C的切线是处的主方向,则称C为S的曲率线.

命题3() 使S上的规则连接曲线C成为S的曲率线的必要和充分条件是

对C上任意参数曲线成立,其中且是的可微分函数.在这种情况下,是沿着的主曲率.

在处的主曲率的知识使我们能够轻松计算沿给定方向的法向曲率.实际上,令且.由于和构成的正交基,所以我们有

其中是方向上从到的角度.沿着的法向曲率由下式给出

最后一个表达式通常称为欧拉公式;实际上,它只是基第二种基本形式的表达.

**定义6** 令并令是高斯映射的微分.的行列式是S在p处的高斯曲率. 的一半轨迹的负值称为S在p处的平均曲率H.

根据主曲率，我们可以写成

**定义7** 曲面S的一个点称为

1. 椭圆形如果.
2. 双曲面如果.
3. 抛物面如果,且
4. 平面如果.

**定义8** 如果在处,,则称为的**脐点[umbilical point]**;特别地,平面点()是脐点.

命题4 如果连接表面S的所有点都是脐点,则S包含在球体或平面中.

定义9 令是中的一个点.S在p处的渐近方向是法向曲率为零的方向.S的渐近曲线是正则连接曲线C⊂S,使得对于每个，C在p处的切线都是一个渐近方向.

定义10 令为表面上的一个点.如果dNp（w1），w2 = w1，dNp（w2）= 0，则两个非零向量w1，w2∈Tp（S）是共轭的。两个方向r1，r2在 如果分别平行于r1和r2的一对非零向量w1，w2是共轭的，则p是共轭的。

3-3 局部坐标系下的高斯映射 2020年6月2日09点51分

命题1 令为表面S的椭圆点.然后在S中存在的邻域V,使得V中的所有点都属于切平面的同一侧.令为双曲点.然后在p的每个邻域中,S点都存在于的两侧.

3.4 向量场 2020年6月2日13点53分

定理1 令为开集中的向量场.给定,存在的轨迹(即),其中.该轨迹在以下意义上是唯一的:任何其他轨迹()与中的一致.

定理2 令为开集中的向量场.对于每个,存在的一个邻域,一个区间和一个映射,使得

1. 对于固定点,曲线是穿过的轨迹.即
2. 是可微的.

映射称为在处的(局部)流动.

令为开集中的向量场,令使得.然后存在的邻域和一个微分函数使得沿的每个轨迹都是恒定的,并且对于所有成立.

上述引理的函数在附近被称为的(局部)第一积分.例如,如果在中定义,则第一积分为.

一个开集中的方向场是一个对应关系,它为中穿过每个分配一条线.如果的邻域存在定义的非零可微向量场,则被称为可微的,使得对于每个是的基函数;如果每个都可微,则r在U中可微.

对于中的每个非零可微矢量场w,对应于一个由w（p）生成的线给定的方向的微分场r（p），p∈U.

如果r（q）是所有q∈C处C处C的切线，则不规则的连接曲线C is U是在U⊂R2中定义的方向r场的积分曲线。

描述方向场的自然方法如下.我们说，对于某些λ∈R，λ= 0，如果w1 =λw2，则在q∈R2处的两个非零向量w1和w2是等效的。两个这样的向量表示通过q的同一直线，如果两个非零向量则相反 属于通过q的同一条直线，它们是等效的。 因此，可以通过为每个q∈U分配一对实数（r1，r2）（属于r的非零向量的坐标）来给出开放集U⊂R2上方向r的场。 对（r1，r2）和（λr1，λr2）对，λ= 0，等价。

定义1 规则表面的开集U⊂S中的向量场w是对应于为每个p∈U分配向量w（p）∈T p（S）.如果对于p处的某些参数化x（u，v）由可微函数a（u，v）和b（u，v）及下列关系给定,则矢量场w在p∈U处是可微的

显然该定义并不依赖的选择.

定理 令w1和w2是一个开放集合U⊂S中的两个向量场,它们在某个点p∈U处线性独立.然后可以对p的邻域V⊂U进行参数化，使得对于每个q∈V 通过q的此参数化的坐标曲线与w1（q）和w2（q）确定的线相切.

推论1 给定一个开放集合U⊂S两个方向场和的,使得在p∈U时,在p的邻域中存在参数化x，从而坐标曲线 x的是和的积分曲线。

推论2 对于所有p∈S，在p的邻域V中存在参数化x（u，v），以使坐标曲线u = const。，v = const。 对于每个q∈V正交相交（这样的x称为正交参数化）.

推论3 令p∈S为S的双曲点.然后可以对p的邻域进行参数化，使得该参数化的坐标曲线为S的渐近曲线.

推论4 令p∈S是S的非脐点。然后可以对p的邻域进行参数化，使得该参数化的坐标曲线为S的曲率线。